Spiralen

1 Einführung

Eine  besonders schöne und vielfältige Klasse von Kurven ist die der Spiralen.



Ob in der Natur 

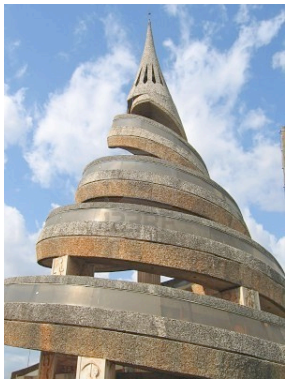
(Schneckenhaus) 

oder Naturwissenschaft (DNA-Doppelhelix),





der Architektur,



der Technik (z.B. spiralförmiges Gehäuse von Turbinen)



oder Kunst – Spiralen sind allgegenwärtig.

Ihre Vorkommens- und Formenvielfalt beeindruckt und ihre Formschönheit hat Menschen zu allen Zeiten fasziniert.

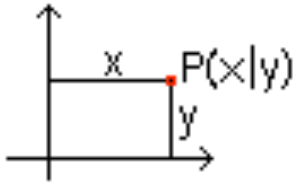
In diesem Modul geht es natürlich auch darum, Spiralen mathematisch zu beschreiben. Gleichzeitig soll aber die Faszination von Spiralkurven erfahrbar werden, indem das Experimentieren und Herumspielen mit unterschiedlichen Kurvenformen nicht zu kurz kommt…

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

2 Grundlagen: Polarkoordinaten

2.1 Polarkoordinatensystem

Kurven kann man in der Mathematik zum Beispiel durch Gleichungen beschreiben. Dabei verwendet man zur Darstellung von Funktionsgraphen üblicherweise das kartesische Koordinatensystem zweier aufeinander senkrecht stehender Achsen, die sich im Nullpunkt schneiden. Dieses lässt sich prinzipiell auch für Kurven verwenden, die sich nicht als Funktionsgraphen interpretieren lassen.

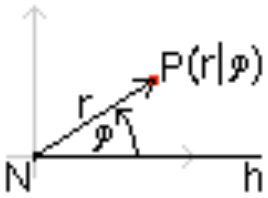


Beispiel Kreisgleichung: $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$

Die Kreislinie ergibt sich als die Menge aller Punkte/Zahlenpaare (x;y), die die Gleichung erfüllen. Dabei ist $(x_M ; y_M)$ der Mittelpunkt und r der Radius des Kreises.

Für kompliziertere Kurven wie Spiralen bietet sich allerdings ein anderes Koordinatensystem an, das selbst kreisförmig angelegt ist: das *Polarkoordinatensystem*.

Bei *Polarkoordinaten* dienen als Bezugsystem ein fester Punkt (der *Pol* N) und eine in diesem Punkt beginnende Halbgerade (die *Polarachse* h). Die Lage eines Punktes P wird dann durch seinen Abstand vom Pol (den *Radius* r) und den Winkel zwischen $\overline{NP}$ und der Polarachse (den *Polarwinkel* φ, "phi") beschrieben.



Wie bei kartesischen Koordinaten schreibt man die beiden Angaben einfach in Klammern hintereinander. Der Polarwinkel wird gegen den Uhrzeigersinn orientiert.

Genau wie in kartesischen Koordinatensystemen können auch in Polarkoordinatensystemen gesetzmäßige Zusammenhänge zwischen den Koordinaten der Punkte durch Gleichungen ausgedrückt werden. Zu einer Kurve gehören dann alle Punkte $P(r;\varphi)$, die eine bestimmte Gleichung, z. B. $r=5\cdot\varphi$ erfüllen.

Am Beispiel des Kreises wird unmittelbar deutlich, welchen Vorteil Polarkoordinaten für die Beschreibung nicht-funktionaler Kurven bieten:

Geben Sie Punkte $P(r;\varphi)$ an, die auf einem Kreis mit Radius r = 10 liegen (Kreismittelpunkt = Pol N). Begründen Sie für einen solchen Kreis die (Polarkoordinaten-) Gleichung $r(\varphi)=10$.

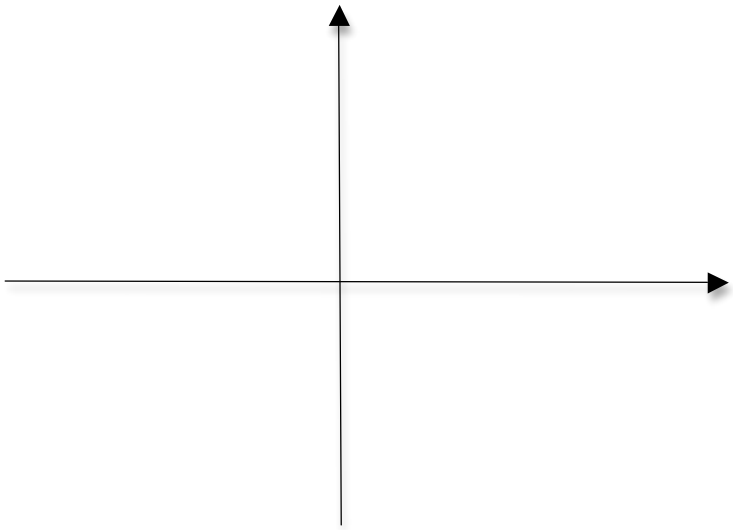
Bei Verwendung von Polarkoordinaten bevorzugt man zur Messung des Polarwinkels das Bogenmaß. Für den Polarwinkel wird dann meist der Parameter t verwendet, ein Punkt hat dann die Polarkoordinaten $(r;t)$.

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

Kleine Übung zu Polarkoordinaten:

Tragen Sie die folgenden Punkte im Koordinatensystem ein und verbinden Sie sie in alphabetischer Reihenfolge!

Nehmen Sie die positive x-Achse als Polarachse. Beachten Sie Grad- und Bogenmaß!



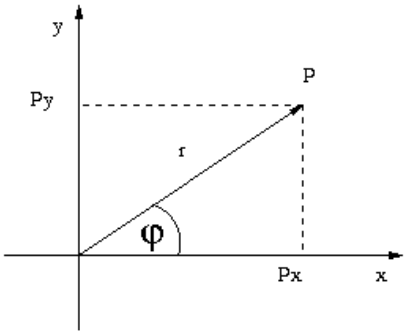
Erinnerung zur Umrechnung:
$\alpha = \frac{t \cdot 180°}{\pi}$.

A(5,7 ; 135°) B(4,1 ; 166°) C(2,2 ; 153°) D(4,5 ; 117°) E(2,5 ; 90°) F(4,5 ; 63°)

G(2,2 ; 0,46) H(4,1 ; 0,24) I(5,7 ; 0,79) J(6,1 ; 0,17) K(7,2 ; 0,59)

2.1 Kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten

Kartesische Koordinaten lassen sich mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen in Polarkoordinaten "umrechnen".



Begründen Sie, dass folgende Beziehungen für einen Punkt P mit den kartesischen Koordinaten (x;y) gelten:

$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \wedge \quad x = r \cdot \cos(\varphi) \quad \wedge \quad y = r \cdot \sin(\varphi)$.

(im Bogenmaß: $x = r \cdot \cos(t) \quad \wedge \quad y = r \cdot \sin(t)$)

<u>Beispiel: Geraden in Polarkoordinaten</u>

Zeigen Sie, dass die Gerade $y = 0{,}5x + 1$ in Polarkoordinaten durch die Gleichung $r(t) = \frac{1}{\sin(t) - 0{,}5\cos(t)}$ beschrieben wird.

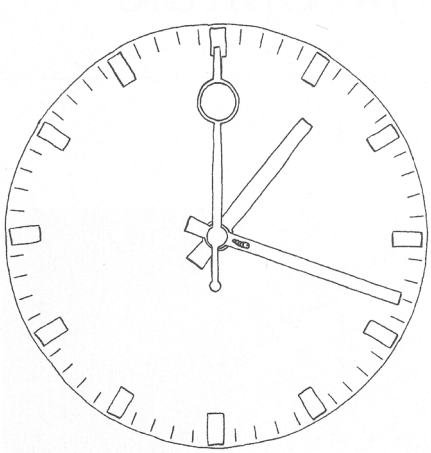
Welche (Polarkoordinaten-) Gleichungen ergeben sich allgemein für $y = mx + n$ und für Geraden, die parallel zur y-Achse verlaufen?

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

3 Archimedische Spiralen

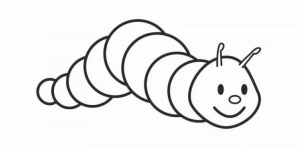
Lässt man für den Polarwinkel Winkel über 360° bzw. 2π zu, kann man auch Spiralen durch Polarkoordinaten beschreiben. Eine einfache Spiralenform werden Sie jetzt kennenlernen.

Betrachten wir dazu folgende ganz alltägliche Situation:



Um Viertel nach eins erwacht eine Raupe in der Mitte einer Kirchturmuhr auf dem Minutenzeiger und möchte dort nicht bleiben. Während der Minutenzeiger sich mit konstanter Geschwindigkeit w_0 um den Mittelpunkt dreht, kriecht die Raupe auf dem Zeiger mit konstanter Geschwindigkeit v_0 nach außen.

Ist t die ab Viertel nach eins verstrichene Zeit in Minuten, so gilt für den Winkel φ zwischen Minutenzeiger und der Ausgangs-drei Uhr-Stellung:



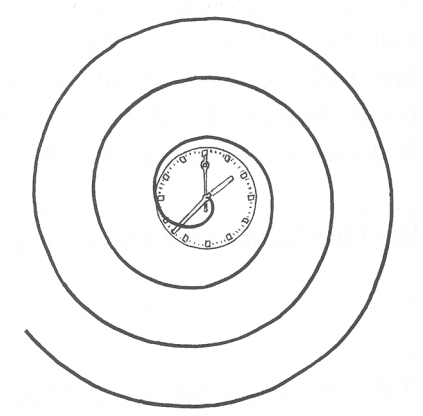
$\varphi(t) = w_0 \cdot t$ und $r(t) = v_0 \cdot t$.

Welche Bahn beschreibt die Raupe relativ zur Uhrfläche? Oder anders ausgedrückt – wir wollen doch bei realitätsnahen Fragestellungen bleiben: Welchen Weg muss ein Käfer nehmen, der sich auf dem Deckglas der Uhr befindet und aus Geselligkeit immer genau oberhalb der Raupe bleiben möchte?

Stände der Zeiger still, wäre die Bahn der Raupe _____

Bliebe sie auf einem bestimmten Zeiger-Punkt sitzen, wäre ihre Bahn _____

Nun finden aber beide Bewegungen gleichzeitig statt. Denkt man sich den Zeiger unendlich lang und beide Bewegungen endlos fortgesetzt, so wird die Raupe unendlich oft (nämlich pro Stunde einmal) um den Mittelpunkt der Uhr gedreht, wobei sie sich immer weiter von ihm entfernt.



Während jeder vollen Umdrehung legt die Raupe auf dem Zeiger die gleiche Strecke zurück. Ihre Bahn windet sich mit fortschreitender Zeit in immer weiteren, immer schwächer gekrümmten Bögen spiralförmig um das Zentrum.

Die von der Raupe relativ zum Zifferblatt beschriebene Kurve wird *archimedische Spirale* genannt. Was in der anschaulichen Deutung der Mittelpunkt der Uhr ist, nennt man den *Pol* der Spirale. Archimedes von Syrakus hat die Kurve vor mehr als zweitausend Jahren im Wesentlichen so (und ohne Raupen) definiert.

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

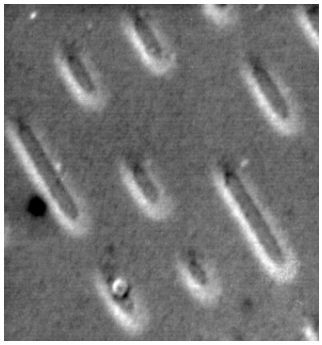
Eine archimedische Spirale ist die Bahn eines Punktes, der sich auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit w_0 rotierenden Halbstrahl mit konstanter Geschwindigkeit v_0 vom Zentrum nach außen bewegt.

Zeigen Sie unter Verwendung der Gleichungen von Seite 4: Die Gleichung der archimedischen Spirale in Polarkoordinaten ist $r = \frac{v_0}{w_0} \cdot \varphi$.

Allgemein haben archimedische Spiralen also Gleichungen der Form $r = a \cdot \varphi$ bzw. $r = a \cdot t$ mit einer von Null verschiedener reellen Konstanten a, der Radius ist also zum Polarwinkel proportional. Archimedische Spiralen zeichnen sich durch einen konstanten Windungsabstand über den gesamten Definitionsbereich aus (– die Raupe kriecht immer mit der gleichen Geschwindigkeit und schafft deshalb pro Stunde immer die gleiche Strecke, welche diesem Windungsabstand entspricht). (Im Falle des Einstiegsbeispiels mit der Raupe ist w_0 und damit a negativ – warum?)

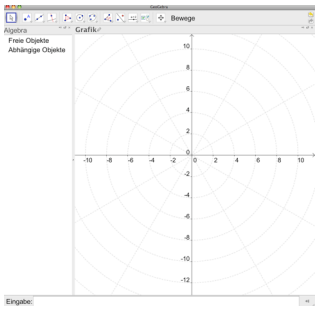
Für Experimentierfreudige: Sie können einfach selbst eine archimedische Spirale zeichnen. Alles, was Sie benötigen, sind zwei Stifte und ein Stück Bindfaden...





Im Alltag tritt die archimedische Spirale häufig dort auf, wo etwas ordentlich aufgewickelt ist (Taue, Toilettenpapier), oder wo etwas Linienförmiges eine Fläche bilden soll (Lakritzspiralen, Schallplattenrillen). Insbesondere kommt sie auf jedem handelsüblichen Informationsträger zur Anwendung: Auf einer CD werden die Daten in Form von kleinen Vertiefungen (für 0 und 1 als kleinstmögliche digitale Dateneinheiten) beginnend bei der innersten Spur der CD spiralartig nach außen geschrieben (siehe Abbildung).

<u>Für die Weiterarbeit benötigen Sie nun das Programm Geogebra.</u>



→ *Öffnen Sie das Programm und wählen Sie im Menü „Perspektiven" die Einstellung „Algebra & Grafik".*

→ *Klicken Sie mit der rechten Maustaste in das Grafik-Fenster und wählen Sie den Punkt „Grafik" aus. Wählen Sie den Reiter „Koordinatengitter" und „Show Grid" sowie den „Grid Type" Polar aus.*

Im Folgenden lernen Sie am Beispiel von archimedischen Spiralen, wie Sie mit Geogebra Spiralen darstellen können.

→ *Wählen in der Werkzeugleiste das Symbol „Schieberegler" aus und klicken Sie in eine Ecke der Graphik um es zu positionieren. Standardmäßig läuft der Parameter a von -5 bis 5.*

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

→ *Geben Sie nun zunächst die Bedingung für die Abhängigkeit von Radius und Polarwinkel ein:* $r(t)=a\cdot t$.

Der Malpunkt muss eingegeben werden. Die Gleichung wird als Gerade gezeichnet. Wenn Sie die Gleichung mit der rechten Maustaste anklicken, können Sie das Anzeigen dieses Objekts verhindern.

Zur Erstellung der Spiralkurve verwenden Sie den Befehl „Kurve“. Dieser erzeugt eine kartesische Parameterkurve, einzugeben sind also x- und y-Koordinate, ein Laufparameter sowie untere und obere Grenze für den Laufparameter.

Wegen $x=r\cdot\cos(t)$ und $y=r\cdot\sin(t)$ (s.o.) ergibt sich also (mit der oberen Grenze 20) folgende Eingabe in die Eingabezeile (unten):

Kurve [r(t)cos(t),r(t)sin(t),t,0,20]

Mit Hilfe des Schiebreglers können Sie nun verschiedene archimedische Spiralen zeichnen. (Wählen Sie ggf. „Objekt anzeigen“, rechte Maustaste auf dem Kurvenbefehl. Eine entsprechende Datei finden Sie auch auf www.langemathenacht.de.)

Welchen Einfluss hat a auf die Spirale? Wie unterscheiden sich die Spiralen für negatives und positives a?

Variieren Sie die obere Grenze – wie ist diese zu wählen, damit genau eine halbe / eine ganze / 5 ganze Spiralwindungen gezeichnet werden?

4 Spiralen höherer Ordnung

Durch leichte Variation der Gleichung für archimedische Spiralen gelangt man zu einer Klasse von Spiralen, bei denen der Windungsabstand nicht konstant ist.

Untersuchen Sie mit Hilfe von Geogebra folgende Fälle und beschreiben Sie jeweils die Auswirkungen auf die Gestalt der Spirale.

<u>1. Erhöhung des Grades von r und a</u>

$r^2=a^2\cdot t$ (Fermatsche Spirale) oder $r^3=a^3\cdot t$

Wenn Sie die Gleichung r(t) ändern, müssen Sie diese jeweils funktional darstellen, also nach r umstellen. Für die Quadratwurzel bzw. die Kubikwurzel verwendet Geogebra die Befehle Sqrt() bzw. Cbrt().

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

Erinnerung: Zur Darstellung beider Äste müssen Sie den Scharparameter in einem symmetrischen Intervall um Null laufen zu lassen.

Beachten Sie: Durch die funktionale Darstellung der Spiralengleichung erhalten Sie beim Grad 2 für r = sqrt (...) den positiven Ast der Hyperbel, für r = - sqrt(...) den negativen.

Wie liegen die beiden Spiral-Äste zueinander für gerade n / für ungerades n?

2. negativer Grad von t

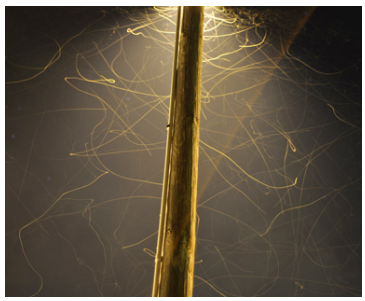
Wählt man Gleichungen, bei denen zwischen Radius und Polarwinkel (oder einer Potenz des Polarwinkels) Antiproportionalität besteht, erhält man sogenannte *Hyperbolische Spiralen*.

$r=\frac{a}{t}$ (Hyperbolische Spirale) oder $r=\frac{a}{t^2}$ (Krummstab)

Untersuchen Sie diese Spiralen und zeichnen Sie zunächst nur einen Ast, also $t \geq 0$. *Wie verhält sich die Spirale für* $t \to 0$, *wie für* $t \to \infty$ *?*

Wenn Sie möchten, können Sie auch jeweils wieder die Lage der beiden Spiraläste zueinander untersuchen.

5 Die logarithmische Spirale



Motten behalten während ihres Fluges einen optischen Reiz stets unter konstantem Blickwinkel im Auge (– dieses Phänomen wird *Menotaxis* genannt). Stellt das Mondlicht den Reiz dar, so erreichen die Motten auf diese Weise gerade Flugbahnen, denn der Mond ist so weit entfernt, dass man die von ihm ausgehenden Lichtstrahlen als parallel betrachten kann.

In der Nähe künstlicher Lichtquellen nimmt der Weg der Motten andere Gestalt an: Indem sie die Strahlen einer mit guter Näherung punktförmigen Lichtquelle unter konstantem Winkel schneiden, fliegen sie nicht mehr geradeaus, sondern bewegen sich in enger werdenden Windungen um das Zentrum herum.



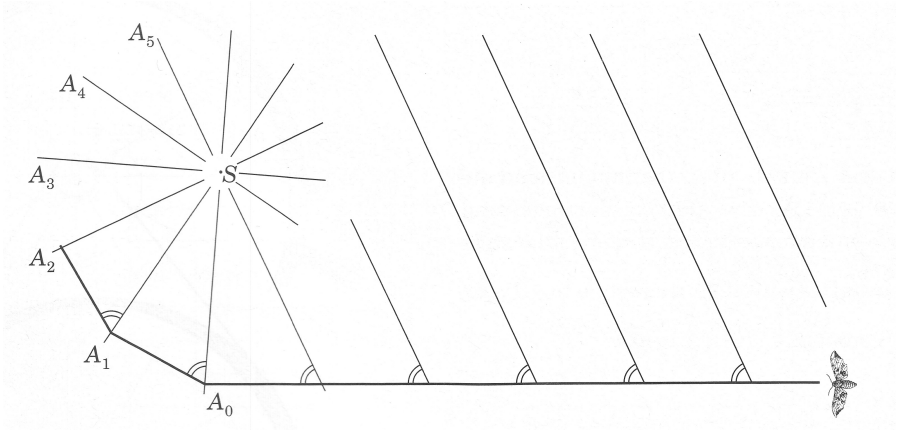
Welche Bahn beschreiben Sie dabei genau?

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

Genauer gefragt: Welche ebene Kurve schließt mit allen Strahlen durch einen festen Punkt den gleichen Winkel ein?

Die Beantwortung der Frage hängt natürlich vom Winkel α ab. Die trivialen Fälle: Für $\alpha = 0°$ ergibt sich eine Gerade durch den Pol, für $\alpha = 90°$ ein Kreis um den Pol.

Für den Fall $\alpha < 90°$ betrachten wir der Einfachheit halber nur einzelne Lichtstrahlen und tun so, als ob das Insekt seine Flugrichtung nur an ihnen neu einstellt. Der Vollwinkel um S wird dazu in eine feste Zahl gleicher Teilwinkel (hier: 12) unterteilt.



Messen Sie den Blickwinkel und setzen Sie die Zeichnung fort.

Eines ist direkt klar: Da der Winkel größer Null ist, wird der Prozess theoretisch nie enden: Der Pol ist ein asymptotischer Punkt des Streckenzuges, der in unzähligen, immer engeren Windungen umlaufen wird.

Begründen Sie: Nach Konstruktion sind alle entstandenen Dreiecke ähnlich.

Daraus folgt, dass das Verhältnis je zweier aufeinander folgender, sich entsprechender Dreiecksseiten immer gleich ist. (Man sagt: Die Länge dieser Seiten bildet eine *geometrische Folge*.)

Messen Sie näherungsweise die Radien der Kurvenpunkte A_n.

Radius	$\overline{SA_0}$	$\overline{SA_1}$	$\overline{SA_2}$	$\overline{SA_3}$			
Länge in mm							

Bestimmen Sie das Verhältnis zweier aufeinander folgender Strecken $\overline{SA_{n+1}}$ und $\overline{SA_n}$.

Begründen Sie dass die Funktion $r(n) = \overline{SA_0} \cdot (\sin(\alpha))^n$ die Länge des Radius $\overline{SA_n}$ in Abhängigkeit von n beschreibt. (α ist der konstante Blickwinkel, s.o.)

Unabhängig davon, wie viele Polgeraden für eine diskrete Näherungslösung benutzt werden, bleiben die wichtigen Eigenschaften der Konstruktion erhalten: Alle auftretenden Dreiecke sind einander ähnlich, d. h. die aufeinander folgenden Radien eines Streckenzuges bilden eine geometrische Folge, r hängt exponentiell von n ab.

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

Mit wachsender Zahl der für die Näherungslösung eingezeichneten Polgeraden wird der Streckenzug einer „echten“, glatten Kurve immer ähnlicher. Auch bei Grenzwertbildung ergibt sich – wie im diskreten Fall – ein exponentieller Zusammenhang! Der Radius r hängt dann nicht mehr von n, sondern vom Mittelpunktswinkel φ bzw. t ab.

Jede Kurve, die alle durch ein gemeinsames Zentrum verlaufenden Geraden unter dem gleichen Winkel schneidet, deren Tangente also mit dem Radius stets den gleichen Winkel einschließt, ist eine logarithmische Spirale.

Spiralen dieser Art werden durch Gleichungen der Form $r=c\cdot b^t$ oder üblicher $r=a\cdot e^{kt}$ beschrieben. Stellt man die Gleichung zum Polarwinkel um, ergibt sich der namensgebende logarithmische Zusammenhang: $t=\frac{1}{k}\cdot\ln(\frac{r}{a})$.

Diese Spiralart unterscheidet sich grundsätzlich von allen bisher besprochenen: Bei ihr wächst der Radius exponentiell mit dem Polarwinkel. Sie besteht nur aus einem Ast, der kein Anfang und kein Ende besitzt.

Zeichnen Sie verschiedene logarithmische Spiralen mit Geogebra. Führen Sie einen zweiten Schieberegler ein, damit Sie die Auswirkungen der Parameter a und k untersuchen können.

(Eine entsprechende Datei finden Sie auch auf www.langemathenacht.de.)

5 Spiralen und kein Ende

Sie haben nun einige Grundlagen über Spiralen und ihre Darstellung in Geogebra kennengelernt. Abschließend einige Impulse zur weiteren Arbeit...

→ Muster & More – Spiralen und Kurven mit Geogebra

Experimentieren Sie mit den Darstellungsmöglichkeiten des Programms und erzeugen Sie weitere Kurven. Die folgende Internetseite hält viele Anregungen für weitere Kurven und Figuren bereit: Herzkurven, Rosetten, die Pascalsche Schnecke...

http://www.mathematische-basteleien.de/polarkoordinaten.htm

→ Natürlich spiralig – Spiralen in der Natur

Es ist schon faszinierend in welcher Vielfalt Spiralen in der Natur vorkommen. Vielleicht möchten Sie diesbezüglich einmal selber recherchieren: die genetische Spirale und das Phänomen der Phyllotaxis (sowie insbesondere die Verbindung zur berühmten Fibonacci-Folge), Schneckenhäuser und Muscheln, Spiralnebel... Die erste Internetseite gibt einen Einstiegsüberblick und enthält faszinierende Abbildungen, die zweite zeigt Verbindungen zwischen Spiralmustern, Fibonacci-Folge und Goldenem Schnitt auf.

http://www.holger-ullmann.de/Muscheln/Fraktale/Beispiele_Spiralen.html
http://www.uwe-alfer.de/privat/privat_fib010.html

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

→ *Spiralen in anderen Modulen...*

Recherchieren Sie den Begriff Klothoide und tauschen Sie sich darüber mit jemandem aus einer Arbeitsgruppe zum Modul „Autobahnkreuze“ aus.

Recherchieren Sie das Vorkommen von Spiralen in der sog. Mandelbrot-Menge und begeben Sie sich zusammen mit jemandem aus einer Arbeitsgruppe zum Modul „Fraktale Kurven“ auf die Suche.

→ *Spiralen ohne Ende...*

Gehen Sie selbst auf Entdeckungsreise... Begeben Sie sich auf die Spuren eines armen Steinmetzes, der durch das Ableben des Mathematikers Jakob Bernoulli vor eine (für ihn) unlösbare Aufgabe gestellt wurde... Oder spüren Sie der mystischen Bedeutung von Spiralen nach... Oder... Oder... Oder...

Quellen

Mathe-Welt. Spiralen, Beilage zu: Mathematik lehren 111

Homepage von Jürgen Köller, http://www.mathematische-basteleien.de/ (Januar 2012)

Heitzer, Johanna: Spiralen. Ein Kapitel phänomenaler Mathematik, Leipzig 1998

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012